Lógica

Resolución en Lógica Proposicional

Damiano Zanardini

Graduado/a en Ingeniería Informática
Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid
damiano.zanardini@gmail.com
damiano@fi.upm.es

Curso Académico 2013/2014

Introducción

Idea general

- en el tema anterior aprendimos cómo transformar un razonamiento en forma clausular
- entonces comentamos que lo que nos interesaba es la satisfacibilidad del conjunto de cláusulas
- ahora vamos a ver cómo se puede decidir si un conjunto de cláusulas es satisfacible

Satisfacibilidad

Un conjunto de cláusulas es satisfacible sii existe una interpretación que sea modelo de todas y cada una de las cláusulas

Introducción (paréntesis)

Dónde estamos y a dónde vamos

- decidir la satisfacibilidad de una fórmula proposicional (o un conjunto de fórmulas) es el problema SAT, extremadamente importante en informática
  - verificación de circuitos y procesadores
  - horarios, planificación, calendarios, optmización...
  - propiedades de programas (p. ej. la terminación o la corrección de algunas operaciones)
- por eso hasta ahora ha habido tanta investigación en los algoritmos para resolver SAT:
  - porque tiene muchísimas aplicaciones $\rightsquigarrow$ `http://www.satlive.org`
  - y también por la $\mathcal{NP}$-completitud

De vuelta a la introducción

Satisfacibilidad e instatisfacibilidad

- para demostrar la satisfacibilidad basta dar un modelo
- para demostrar la insatisfacibilidad hace falta demostrar que no hay modelos, que es algo más difícil

Por lo tanto, vamos a introducir el método de resolución que nos ayuda en la segunda tarea, y también nos dice algo de la primera:

- si el conjunto es insatisfacible, entonces lo demostramos
- si es satisfacible, podemos igualmente aplicar el método y después de un número finito de pasos sabremos que no podemos seguir, por lo que quedará demostrado que es satisfacible

El método de Resolución de Robinson

Idea general

Obtener nuevas cláusulas deducidas del conjunto original $\mathcal{C}$, de forma que $\mathcal{C}$ es insatisfacible si se pueden deducir un literal y también su negación

Regla de la resolución

Dadas dos cláusulas $L \vee .. \vee L \vee C_1$ y $\neg L \vee .. \vee \neg L \vee C_2$, donde L es un literal, se puede deducir una nueva cláusula $C_1 \vee C_2$ que se llama el resolvente

- si hay más copias de L o $\neg L$ es como si hubiera una (idempotencia)
  - $\neg p \vee \neg p \vee q$ es lo mismo que $\neg p \vee q$
- se puede cambiar el orden de los literales (comutatividad)
  - $\neg p \vee q$ es lo mismo que $q \vee \neg p$
- la aplicación de esta regla de resolución se llama paso de resolución sobre L con resolvente $C_1 \vee C_2$

El método de Resolución de Robinson

Insatisfacibilidad

- aplicando la regla varias veces se puede derivar una contradicción si y sólo si el conjunto original es insatisfacible
- dicha contradicción viene de la generación de L y $\neg L$ como resolventes
- en este caso, un último paso de resolución aplicado a L y $\neg L$ genera la cláusula vacía $\square$, que hace explícito el resultado de insatisfacibilidad

Ventajas

- el sistema de deducción sólo consiste de una única regla
- todo el proceso se puede automatizar fácilmente

El método de Resolución de Robinson

Método: dado un conjunto S de cláusulas

$X = S$

repite

generar con pasos de resolución todos los resolventes posibles
para los elementos de X: sea este conjunto $R(X)$

si $(\square \in R(X))$ **entonces STOP**: $INSAT(S)$

si $(R(X) \subseteq X)$ **entonces STOP**:
se han generado ya todos los resolventes posibles
sin haber generado $\square$; por lo tanto $SAT(S)$

$X = R(X) \cup X$

Teorema (Res)

Un conjunto S de cláusulas es insatisfacible sii $\square$ se puede deducir de él por resolución

Ejemplos

$S = \{\ p,\ \ q \lor \neg p \lor \neg t,\ \ t \lor s,\ \ \neg s,\ \ \neg q\ \}$

C_1:	p	
C_2:	$q \lor \neg p \lor \neg t$	
C_3:	$t \lor s$	
C_4:	$\neg s$	
C_5:	$\neg q$	
C_6:	t	(C_3, C_4)
C_7:	$q \lor \neg t$	(C_1, C_2)
C_8:	q	(C_6, C_7)
C_9:	$\square$	(C_5, C_8)

- la primera columna es el nombre del resolvente, y la segunda es el resolvente
- la tercera columna son las cláusulas que resuelven entre sí generando la nueva

Hallar la cláusula vacía $\square$ demuestra la insatisfacibilidad de S

Ejemplos

$S = \{\ p,\ q \vee \neg p \vee \neg t,\ t \vee s,\ \neg s\ \}$

C_1:	p
C_2:	$q \vee \neg p \vee \neg t$
C_3:	$t \vee s$
C_4:	$\neg s$

1^a iteración	C_5:	$q \vee \neg t$	(C_1, C_2)
	C_6:	$q \vee \neg p \vee s$	(C_2, C_3)
	C_7:	t	(C_3, C_4)
2^a iteración	C_8:	$q \vee s$	(C_3, C_5)
	C_9:	q	(C_5, C_7)
	C_{10}:	$q \vee \neg p$	(C_4, C_6)
3^a iteración		(nada más)	

- cada parte de la derivación corresponde a una iteración del bucle
- no se han representado los resolventes repetidos
- al no poder hallar la cláusula vacía y ni generar más resolventes se demuestra la satisfacibilidad de S